MA2 – „písemná" přednáška 29. 4. 2020

Trojný integrál (Riemannův)

„Úvod": dvojný „integrál" už snad intuitivně zvládáme – zkusme tedy si nejdříve představit trojný integrál „intuitivně"; pak uvedeme definici, a dále podmínky existence, vlastnosti, návody k výpočtu (asi „rozšířené" Fubiniho věty), asi i substituci do „vhodných" souřadnic, jiných, než jsou kartézské (vhodné opět pro „zavedení" tohoto integrálu) a i aplikace a příklady.

Intuitivně $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$, $\Omega \subset R^3$, $f(x,y,z)$ def. v Ω:

Vezmeme $\Omega \subset R^3$, omezenou, uzavřenou a souvislou množinu, (zobecnění $\langle a,b\rangle \subset R$ a ω – měřitelné, $\omega \subset R^2$); množinu Ω rozdělíme na „malé" části Ω_{ijk}, které mají společné nejvýše hranice, funkci f v „dílku" Ω_{ijk} nahradíme konstantní hodnotou funkce f v „některém" vybraném bodě $X_{ijk} \in \Omega_{ijk}$, pak vytvoříme Riemannovy integrální součty, kde $V(\Omega_{ijk})$ bude značit objem „dílku" Ω_{ijk}, tj. $\sum\limits_{ijk} f(X_{ijk})\,V(\Omega_{ijk})$, a pak „zkoumáme", co se

se součty „děje", když dílky „dělení" Ω_{ijk} se limitně blíží k „bodu", tj. $V(\Omega_{ijk}) \to 0$ ale tak, že i maximální vzdálenost bodů z Ω_{ijk} „jde" k nule. A pokud bude existovat vlastní limita Riemannových integrálních součtů (tato „hrana"), navíc by měla být nezávislá tato limita na volbě těch vybraných X_{ijk}, pak tato limita bude (v analogii k $\int_a^b f(x)\,dx$ a $\iint\limits_{\omega} f(x,y)\,dx\,dy$) Riemannovým integrálem funkce f přes oblast Ω.

A co je třeba „upřesnit" v definici $\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$?

Asi : a) dělení oblasti Ω – tak začneme s tou nejjednodušší oblastí – hranolem $\Omega = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle \times \langle e,f\rangle$;

b) jak budeme definovat limitu integrálních součtů.

A pak existence limity se asi vyšetří analogicky k $\iint_\omega f(x,y)\,dx\,dy$, jen se „změní" podmínky na $\Omega \subset R^3$ (když Ω bude „obecná") a asi i podmínky na množinu bodů nespojitosti funkce f.

Vlastnosti integrálu (díky definici pomocí limity) zůstanou, a návod na výpočet asi „poskytne" „obecnější" Fubiniho věta.

Tedy :

1) <u>Definice Riemannova trojného integrálu</u> (pro $\Omega = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle \times \langle e,f\rangle$)

Nechť $\Omega = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle \times \langle e,f\rangle$, $f(x,y,z)$ je def. na Ω;

Definujme dělení Ω : $D = D_x \times D_y \times D_z$, kde

D_x je dělení $\langle a,b\rangle$, D_y je dělení $\langle c,d\rangle$, D_z je dělení $\langle e,f\rangle$,

označme $\Omega_{ijk} = \langle x_{i-1}, x_i\rangle \times \langle y_{j-1}, y_j\rangle \times \langle z_{k-1}, z_k\rangle$

$$|\Omega_{ijk}| = (x_i - x_{i-1}) \cdot (y_j - y_{j-1}) \cdot (z_k - z_{k-1}) =$$

$$= \Delta_i x \cdot \Delta_j y \cdot \Delta_k z \quad \begin{pmatrix} i=1,\dots n \\ j=1,\dots m \\ k=1,\dots l \end{pmatrix}$$

a vezmeme $\nu(D) = \max\limits_{i,j,k} (\Delta_i x, \Delta_j y, \Delta_k z) =$

$\max(\nu(D_x), \nu(D_y), \nu(D_z))$

a zvolme bod $X_{ijk} = (\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \in \Omega_{ijk}$, $i=1,\dots n$; $j=1,\dots m$; $k=1,\dots l$.

Pak Riemannův integrální součet (pro dělení D s volbou $\{X_{ijk}\}$)

je
$$\sigma(f, D, \{X_{ijk}\}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)\,\Delta_i x\,\Delta_j y\,\Delta_k z \,.$$

Pak definujeme:

Řekneme, že funkce f je Riemannovsky integrovatelná přes oblast Ω, (a píšeme opět $f \in R(\Omega)$), když existuje vlastní limita

$$\lim_{\nu(D)\to 0} \sigma(f, D, \{X_{ijk}\}) = I \in R,$$ nezávislá na volbě $\{X_{ijk}\}$.

Tuto limitu pak nazýváme trojným (Riemannovým) integrálem funkce f přes Ω a značíme

$$I = \iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

Jednoduchá interpretace $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ (*) – hmotnost Ω:

Je-li $f(x,y,z)$ hustota v oblasti Ω, pak integrál (*) vyjadřuje hmotnost Ω – integrální součty představují aproximaci hustoty konstantní hodnotou (vybranou) v každém dílku, tedy si představujeme „rozdělený" na malé „homogenní kvádříky", a v limitě pak (pro k nule jdoucí rozměry „dílčích kostiček") lze integrál chápat jako celkovou hmotnost tělesa.

Ukažme si pak v příkladech aplikace dále!
(V aplikacích se často před aplikací používá symbol $\iiint_{\Omega} f\,d\Omega$, spec. pro hmotnost $m = \iiint_{V} \rho\,dV$ – „bez" souřadnic)

2) Podmínky existence $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$, $\Omega = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle \times \langle e,f\rangle$

(i) podmínka nutná: $f \in R(\Omega) \Rightarrow f$ je omezená na Ω
(tj. fce neomezené na Ω nemají R-integrál);

(ii) podmínky postačující:

a) f je spojitá na Ω (tj. $f \in C(\Omega)$) $\Rightarrow f \in R(\Omega)$

b) je-li množina K sjednocení konečně mnoha bodů, jednoduchých oblouků a grafů funkcí $\varphi_i \in C^{(1)}(\omega_i)$, kde $\omega_i \subset R^2$ jsou omezené množiny, $K \subset \Omega$
a f je spojitá na $\Omega \setminus K$ a f je omezená na $\Omega \Rightarrow f \in R(\Omega)$.

3. vlastnosti (R) $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ (budeme zde pro jednoduchost značit $\iiint\limits_{\Omega} f$)

(i) linearita: $f_1, f_2 \in R(\Omega) \Rightarrow f_1 + f_2 \in R(\Omega)$ a $\iiint\limits_{\Omega} f_1 + f_2 = \iiint\limits_{\Omega} f_1 + \iiint\limits_{\Omega} f_2$

$f \in R(\Omega), c \in R \Rightarrow cf \in R(\Omega)$ a $\iiint\limits_{\Omega} cf = c \iiint\limits_{\Omega} f$

(ii) aditivita: $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, Ω_1, Ω_2 „kvádry" (nebude vyžadováno) (dovedete si představit),
$\Omega_1 \cap \Omega_2 \subset \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$ (tj. Ω_1, Ω_2 mají jen společnou hranici);

pak $f \in R(\Omega) \Rightarrow f \in R(\Omega_1)$ i $f \in R(\Omega_2)$ a

$$\iiint\limits_{\Omega} f = \iiint\limits_{\Omega_1} f + \iiint\limits_{\Omega_2} f$$

(iii) <u>střední hodnota integrálu</u> $\iiint\limits_{\Omega} f$ je definována:

$$\frac{1}{\mu(\Omega)} \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \quad , \quad f \in R(\Omega)$$

($\mu(\Omega) = (b-a)(d-c)(f-e)$ – „objem" Ω)

– je to vlastně „průměr" veličiny f v Ω

<u>a Věta o střední hodnotě:</u>

Je-li f spojitá v $\Omega = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle \times \langle e,f\rangle$, pak existuje bod $(\alpha,\beta,\gamma) \in \Omega$ takový, že

$$f(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{1}{\mu(\Omega)} \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz .$$

V naší interpretaci $\iiint\limits_{\Omega} \rho\, d\Omega$, ρ-hustota, toto znamená, že v Ω existuje takový bod (α,β,γ), kde hustota $\rho(\alpha,\beta,\gamma)$ je průměrná hustota v Ω – platí

$$(\text{hmotnost} =) \iiint\limits_{\Omega} \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \rho(\alpha,\beta,\gamma)\cdot\mu(\Omega) .$$

($\rho(\alpha,\beta,\gamma)\mu(\Omega)$ – hmotnost Ω, kdyby byla homogenní s hustotou $\rho(\alpha,\beta,\gamma)$)

a zbývá „návod" k výpočtu $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$:

Výpočet $\iiint f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$:

Fubiniho věta:

$\Omega = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle \times \langle e,f\rangle$, $f \in C(\Omega)$ (speciálně – stačí) $\Rightarrow f \in R(\Omega)$

a platí:
$$I = \iiint\limits_{\langle a,b\rangle\times\langle c,d\rangle\times\langle e,f\rangle} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_e^f f(x,y,z)\,dz \right) dy \right) dx \, ;$$

a můžeme jakkoli zaměnit pořadí integrace, tj. také
$$I = \int_c^d \left(\int_e^f \left(\int_a^b f(x,y,z)\,dx \right) dz \right) dy \overset{\text{atd}}{=} \dots$$

(a mělo by ve znění věty ještě být – pro první způsob integrace a pak zase analogicky:

pro každé $x,y \in \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle$ je $f(x,y,z) \in R(\langle e,f\rangle)$;

pro každé $x \in \langle a,b\rangle$ je $\displaystyle\int_e^f f(x,y,z)\,dz \in R(\langle c,d\rangle)$

a funkce (proměnné x) $\displaystyle\int_c^d \left(\int_e^f f(x,y,z)\,dz \right) dy \in R(\langle a,b\rangle)$ –

– v příkladech pro integraci konkrétní "spojité" funkce je toto vždy zřejmé)

A poznámka: jednodušší zápis F. věty ("méně závorek") – [illegible]

$$\iiint f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f f(x,y,z)\,dz$$

(integrál trojný) ("integrál trojnásobný")

Příklad

$$\iiint\limits_{\Omega} (x+y+z)\,dx\,dy\,dz \underset{F.V.}{=} \int_0^1 \left(\int_1^3 \left(\int_1^2 (x+y+z)\,dz \right) dy \right) dx =$$

$\Omega = \langle 0,1\rangle \times \langle 1,3\rangle \times \langle 1,2\rangle$

f je spojitá v $\Omega \Rightarrow f \in R(\Omega)$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^3 \left[xz + yz + \frac{z^2}{2} \right]_1^2 dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_1^3 \left(x + y + \frac{3}{2} \right) dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} + \frac{3}{2}y \right]_1^3 dx = \int_0^1 (2x + 4 + 3)\,dx = \left[x^2 + 7x \right]_0^1 = 8$$

(Zkuste i další „pořadí" integrace!)

Poznámka k zápisu integrálu: (viz poznámka za Fubiniho větou)

Jako u dvojného integrálu, lze užít (a také to budu užívat a vy uvidíte též) zápisu s menším „počtem" závorek – přehlednější zápis je asi

$$\iiint\limits_{\Omega} (x+y+z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 dx \int_1^3 dy \int_1^2 (x+y+z)\,dz =$$

$$= \int_0^1 dx \int_1^3 \left[xz + yz + \frac{z^2}{2} \right]_1^2 dy = \int_0^1 dx \int_1^3 \left(x + y + \frac{3}{2} \right) dy =$$

$$= \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} + \frac{3}{2}y \right]_1^3 dx = \dots$$

Dále – $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$, kde Ω má „není" kvádr

(zobecnění lze provést analogicky k zobecnění u integrálu dvojného)

Nechť $\Omega \subset R^3$, Ω – uzavřená, omezená, souvislá množina (budeme krátce říkat uzavřená, omezená oblast) –

– pak existuje kvádr $\mathcal{O} \subset R^3$: $\Omega \subset \mathcal{O}$ a definujeme

$$\tilde{f}(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z) & ,(x,y,z) \in \Omega \\ 0 & ,(x,y,z) \in \mathcal{O} \setminus \Omega \end{cases}$$

1) Potom definujeme:

1) $\iiint\limits_{\Omega} f = \iiint\limits_{\mathcal{O}} \tilde{f}$, ex-li $\iiint\limits_{\mathcal{O}} \tilde{f}$. (a značíme $f \in R(\Omega)$)

(tedy, $f \in R(\Omega)$, když (dle definice) $\tilde{f} \in R(\mathcal{O})$)

2) ex.-li $\iiint\limits_{\Omega} 1\,dx\,dy\,dz$, pak Ω je měřitelná množina v R^3

a $\iiint\limits_{\Omega} 1\,dx\,dy\,dz = \mu(\Omega)$ – míra množiny Ω.

Existence $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ bude teď záviset nejen na vlastnostech funkce f, jako bylo pro $\Omega = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle \times \langle e,f\rangle$, ale zřejmě opět i na vlastnostech integračního oboru Ω, podobně jako u integrálu dvojného, neboť funkce $\tilde{f}$ může být nespojitá na $\partial\Omega$ (a zpravidla je).

2) Věta o existenci $\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

1) Je-li Ω omezená a uzavřená oblast, $\Omega \subset R^3$, a hranice $\partial\Omega$ je sjednocení konečné množiny grafů funkcí dvou proměnných $g_i \in C^{(1)}(\omega_i)$, $\omega_i \subset R^2$ omezená, $i=1,2,\dots n$, pak Ω je měřitelná oblast („standardní" – jiný název).

2) $f: \Omega \subset R^3 \to R$, Ω – měřitelná oblast; pak

(i) (nutná podmínka existence trojného integrálu):
$f \in R(\Omega) \Rightarrow f$ je omezená na Ω;

(ii) (postačující podmínky existence trojného integrálu):

a) $f \in C(\Omega) \Rightarrow f \in R(\Omega)$
(tj. spojitá funkce na uzavřené měřitelné Ω je integrovatelná na Ω);

b) $f \in C(\Omega \setminus K)$, kde K je definována v existenční větě pro $\Omega = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle \times \langle e,f\rangle$, a f je omezená na Ω, pak $f \in R(\Omega)$
(platí: $\mu(K)=0$, a integrál funkce f přes Ω

$\iiint_\Omega f$ nezávisí na hodnotách f v bodech K).

3, Vlastnosti, tj. linearita, aditivita i věta o střední hodnotě (pro funkci spojitou na Ω) platí i pro „obecnou" $\Omega \subset R^3$, měřitelnou oblast (nebudu vás „tím unavovat, každý to, doufám, vidí".)

A výpočet – ukážeme si Fubiniho větu pro speciálně „hezké" oblasti $\Omega \subset R^3$ (měřitelné)

(i) Základní množina 1. typu:

$$\Omega = \{ [x,y,z] \in R^2 ;\ [x,y] \in \omega \subset R^2,\ \omega \text{ – měřitelná (uzavřená) a } \varphi(x,y) \leqq z \leqq \psi(x,y),\ (x,y) \in \omega,\ \varphi, \psi \in C^1(\omega) \}$$

(ω – uzavřenou bereme pro jednoduchost)

Pak Ω je měřitelná (uzavřená) oblast a pro $f \in R(\Omega)$ (speciálně pro $f \in C(\Omega)$) platí:

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_\omega \left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy$$

(Fubiniho věta pro tuto základní množinu)

A když navíc, $\omega = \{ [x,y] \in R^2 ;\ a \leq x \leq b ;\ u(x) \leq y \leq v(x),\ u,v \in C(\langle a,b \rangle) \}$,

pak

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_\omega dx\,dy \underbrace{\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz}_{\in R(\omega)} = \int_a^b dx \int_{u(x)}^{v(x)} dy \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz .$$

(opět užíváme „jednodušší" zápis).

Příklady:

1) Speciálně: $\mu(\Omega) := \iiint\limits_{\Omega} dx\,dy\,dz$, „$\Omega$ – 1. typu",

pak $\mu(\Omega) = \iint\limits_{\omega} dx\,dy \int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} dz = \iint\limits_{\omega} (\psi(x,y) - \varphi(x,y))\,dx\,dy$

(tedy z „dvojného" integrálu – $\mu(\Omega)$ je zde „jako" objem tělesa o základně $\omega \subset R^2$, ohraničeného „shora" grafem $z = \psi(x,y)$, „zdola" grafem funkce $z = \varphi(x,y)$, a pak válcovou plochou, kolmou na rovinu $z = 0$, „postavenou" na hranici oblasti ω, má-li $\partial\omega$ rovnici $\phi(x,y) = 0$, pak toto je i rovnice příslušné válcové plochy).

2) $\iiint\limits_{\Omega} x\,dx\,dy\,dz$, kde $\Omega = \{[x,y,z];\ 0 \le z \le 1-x-y,\ 0 \le y \le x-1;\ 0 \le x \le 1\}$

(také lze Ω zadat takto: Ω je omezená oblast, $\Omega \subset R^3$, která je ohraničená rovinami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ a $x+y+z = 1$)

odtud: $z = 0$ a $z = 1-x-y$ – ohraničující plochy,

tedy $\underline{0 \le z \le 1-x-y}$ (jinak by Ω byla neomezená),

a odtud:
$$\left.\begin{array}{l} x+y \le 1 \Rightarrow y \le 1-x \\ \text{a ze zadání: } 0 \le y \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{0 \le y \le 1-x}$$

a opět odtud: když $0 \le y \le 1-x$, pak
$$\left.\begin{array}{l} 0 \le 1-x \Rightarrow x \le 1 \\ \text{a ze zadání } 0 \le x \end{array}\right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \underline{0 \le x \le 1}$$

<u>a výpočet:</u> $\quad (f \in R(\Omega)$ – je spojitá v $R^3)$

$$\iiint_\Omega x \, dx\,dy\,dz \underset{F.V.}{=} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} x \, dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x(1-x-y)\,dy =$$

$$= \int_0^1 x \left[(1-x)y - \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 x \left[(1-x)^2 - \frac{(1-x)^2}{2} \right] dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 x(1-x)^2 \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^3 - 2x^2 + x)\,dx = \dots = \frac{1}{24}$$

(zkontrolujte, prosím)

3) Máme vypočítat moment setrvačnosti homogenní oblasti Ω (hustota $\rho > 0$), kde Ω je dána v příkladu 2), vzhledem k ose z:

1) „model" (obecně): $\quad J = \iiint_\Omega d^2(x,y,z) \cdot \rho(x,y,z) \, dx\,dy\,dz$

(„fyzikálně" $\quad J = \iiint_\Omega \underbrace{d^2(X) \underbrace{\rho(X)\,dV}_{dm}}_{\text{„}dJ\text{"}}$)

($d(x,y,z)$ – vzdálenost bodu (x,y,z) od osy otáčení)

<u>Tedy v tomto příkladu:</u> (vzdálenost bodu $X = (x,y,z)$ od osy z je $d(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$)

$$J = \iiint_\Omega (x^2+y^2) \cdot \rho \, dx\,dy\,dz$$

Výpočet:

$$J = \iiint (x^2+y^2)\,\rho\, dx\,dy\,dz = \rho \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (x^2+y^2)\,dz \stackrel{*}{=}$$

Návod a poznámka:

Integruje se „od vnitřního integrálu" a meze i tohoto „vnitřního" integrálu mohou záviset na (x,y), pak další integrál – z funkce proměnných (x,y) – získá se i z mezí" – – a ten druhý integrál už nemá než proměnné meze jen závislé na x – a poslední" integrace dle x (v tomto příkladu, ale i obecně" při záměně pořadí integrací) má vždy už jen pevné meze (!) – meze při „konečné" integraci už nesmí" záviset na proměnné – konečná integrace „musí" dát číselný výsledek – ne funkci některé „z proměnných !

$$\stackrel{*}{=} \rho \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \Big[(x^2+y^2)\cdot z\Big]_{(z)=0}^{(z)=1-x-y} dy = \rho \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x^2+y^2)(1-x-y)\,dy$$

$$= \rho \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(x^2(1-x) - x^2 y + (1-x)y^2 - y^3 \right) dy =$$

$$= \rho \int_0^1 \left[x^2(1-x)\,y - \frac{x^2y^2}{2} + (1-x)\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right]_0^{1-x} dx =$$

$$= \rho \int_0 \left[x^2(1-x)^2 - \frac{x^2(1-x)^2}{2} + \frac{(1-x)^4}{3} - \frac{(1-x)^4}{4} \right] dx = \dots\dots$$

A dnešní poslední dva příklady

(a zároveň „úvod" k přednášce příští)

4) Moment setrvačnosti homogenního válce vzhledem k jeho ose

poloměr základny bude R, výška H, a válec „postavíme" na rovinu $z=0$ tak, že osa válce je osa z: tedy (ρ – hustota)

$$J = \rho \iiint_{\Omega} (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz \,, \quad \text{kde } \Omega = \{ [x,y,z] \in R^3 ;\ x^2+y^2 \le R^2 ,\ 0 \le z \le H \}$$

Užijeme pro výpočet Fubiniho větu:

Zkusme: „vnitřní" integrace přes z: $\quad 0 \le z \le H$

a pak přes $\omega = \{[x,y];\ x^2+y^2 \le R^2\}$ integrace „vnější",
$(= K(R))$

tj.

$$J = \rho \iiint_{\Omega} (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz \underset{F.V.}{=} \rho \iint_{K(R)} (x^2+y^2)\Big(\underbrace{\int_0^H dz}_{(=H)}\Big)\,dx\,dy =$$

$$= \rho \cdot H \iint_{\substack{K(R)\\ x,y}} (x^2+y^2)\,dx\,dy = \text{„a zde se nabízejí „polární souřadnice v rovině"" } =$$

$$= \rho H \iint_{K_{r,\varphi}(R)} r^2 \cdot r\,dr\,d\varphi \underset{F.V.}{=} \rho H \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3\,dr = 2\pi\rho H \cdot \Big[\frac{r^4}{4}\Big]_0^R = \frac{\pi \rho H R^4}{2}$$

$\left(\begin{array}{l} r \in \langle 0, R \rangle, \\ \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle \end{array} \right)$

$$\underset{F.V.}{\overset{\text{nebo}}{=}} \int_0^R dr \int_0^{2\pi} \rho H r^3\,d\varphi = \int_0^R r^2 \cdot \underbrace{(\rho\, 2\pi r H\,dr)}_{\text{hmotnost „válcové" vrstvy ve vzdálenosti } r \text{ od osy } z}$$

– sečteme „momenty setrvačnosti „vrstev"

5) $\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je omezená oblast,

ohraničená rovinou $z=0$, válcovou plochou $x^2+y^2=1$
a grafem funkce $z = x^2+y^2+1$ (Ω – uzavřená) :

(i) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$ je spojitá v Ω, Ω měřitelná $\Rightarrow f \in R(\Omega)$

(ii) výpočet : „odhalíme" meze pro užití Fubiniho věty :

ze zadání je hned „vidět", že

a) $0 \le z \le x^2+y^2+1$ a

b) $0 \le x^2+y^2 \le 1$

Tedy se nabízí tento způsob užití Fubiniho věty :

- vnitřní integrace „přes z" – viz a)
- pak integrace „vnější" přes kruh o poloměru 1 a středu v $[0,0]$) ,

tedy

$$\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz \underset{F.V.}{=} \iint\limits_{K_{xy}(1)} \sqrt{x^2+y^2} \int_0^{x^2+y^2+1} dz =$$

$$= \iint\limits_{K_{xy}(1)} \sqrt{x^2+y^2}\,(x^2+y^2+1)\,dx\,dy = \left(\begin{array}{l}\text{opět – převedeme} \\ \text{k polárním souřadnicím}\end{array}\right)$$

$$= \iint\limits_{K_{r\varphi}(1)} r\cdot(r^2+1)\cdot r\,dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (r^4+r^2)\,dr =$$

$$= 2\pi \left[\frac{r^5}{5} + \frac{r^3}{3}\right]_0^1 = 2\pi\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right) = \frac{16}{15}\pi$$

A poznámka k výpočtu posledních dvou integrálů
(a úvod k přednášce příští)

Oblast Ω byla zadána tak, že bylo výhodné „začít" integraci přes z: $\varphi(x,y) \leq z \leq \psi(x,y)$, kde $(x,y) \in K(R)$ (kruh o poloměru R) – a to navíc, že je dobré substituovat do polárních souřadnic – – na tento způsob integrace – proměnná z „zůstává" a integraci přes oblast $\omega \subset R^2$ v rovině (x,y) provedeme pomocí polárních souřadnic, můžeme nahlédnout z „hlediska" integrálu trojného – jde o „substituci", zapsanou „návodem"

$$(*)\quad \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

, a oblast Ω_{xyz} je pak „převedena" na oblast $\Omega_{r,\varphi,z}$

– a opět funguje zde „Jacobián" pro substituci do polárních souřadnic;

Tedy, asi by šlo substituci napsat:

$$\iiint\limits_{\Omega_{xyz}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{\Omega_{r,\varphi,z}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\cdot r\,dr\,d\varphi\,dz$$

---

a pak lze užít Fubiniho věty na integrál přes $\Omega_{r,\varphi,z}$.

Souřadnice v (*) se nazývají válcové (cylindrické) souřadnice.

Takže ještě jednou pořešme daný integrál :

$$\iiint\limits_{\Omega_{xyz}} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{\Omega_{r,\varphi,z}} r \cdot r \,dr\,d\varphi\,dz \overset{*}{=}$$

a vyjádření oblasti Ω :

$\Omega_{xyz} = \{ [x,y,z] ;\ x^2+y^2 \le 1 \ \wedge\ 0 \le z \le x^2+y^2+1 \}$, a pak

$\Omega_{r,\varphi,z} = \{ [r,\varphi,z] ; 0 \le r \le 1 ,\ 0 \le \varphi \le 2\pi ,\ 0 \le z \le r^2+1 \}$,

a tedy

$$\underset{\text{F.V.}}{\overset{*}{=}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^2 \int_0^{r^2+1} dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^2 [z]_0^{r^2+1} dr =$$

$$= 2\pi \int_0^1 r^2(r^2+1)\,dr = 2\pi \left[\frac{r^5}{5} + \frac{r^3}{3} \right]_0^1 = 2\pi \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3} \right) = \frac{16}{15}\pi$$

Oba dva způsoby výpočtu integrálu jsou rovné, můžete si zvolit, co se vám více „líbí".

Příště substituci uděláme „obecně" a zavedeme ještě další jeden způsob popisu polohy bodu v prostoru – pomocí t.zv. souřadnic sférických.